

ЛЕКЦИЯ-11

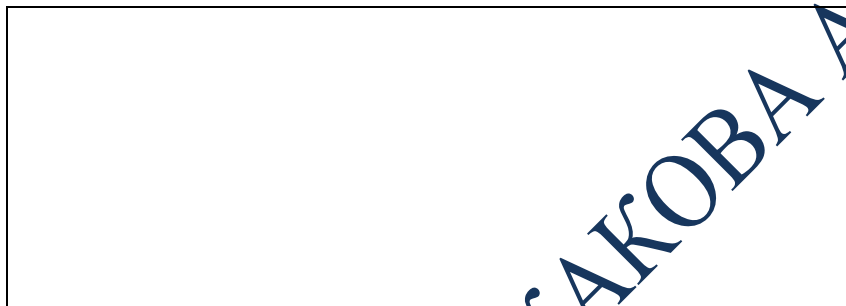
§ 5. Қос интегралдың геометрия мен физикада қолданылуы

1. Көлемді есептеу. Бірінші параграфтан жоғарғы жағынан $z = f(x, y)$ бетімен, мұндағы $f(x, y)$ үзіліссіз функция, төменгі жағынан ауданы бар тұйық D облысымен шектелген қисықсыздықты цилиндрдің көлемі белгілі

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

1-мысал. $z = x^2 + y^2$, $y^2 = 4x$, $x = 1$, $z = 0$ беттермен шектелген дененің көлемін табылық.

Шешуі. $z = x^2 + y^2$ параболоид, $y^2 = 4x$ қисығы – жасаушысы OZ осіне параллель параболалық цилиндр және ол OXY жазықтығында OX осіне қарай симметриялы парабола, $x = 1$ жазықтығы YOZ жазықтығына параллель, $z = 0$ болса XOY жазықтығының теңдеуі.



Цилиндрлік дене XOZ жазықтығына қарай симметриялы, сондықтан AOB облысы көлемінің жартысын тауып оны екі еселеу жеткілікті. Интегралдау облысы $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2\sqrt{x}$. Онда ізделінген көлем

$$V = 2 \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2 \int_0^1 \left(2x^2 \sqrt{x} + \frac{8}{3} x \sqrt{x} \right) dx = 4 \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = 8 \left(\frac{1}{7} + \frac{4}{15} \right) = \frac{344}{105}.$$

2. Ауданды есептеу. Егер (1) формулада $f(x, y) = 1$ болса, онда берілген облыстың ауданын аламыз

$$S = \iint_D dx dy \quad (2)$$

Аудан поляр координатасында

$$S = \iint_G \rho d\rho d\varphi \quad (3)$$