ЛЕКЦИЯ-11

§ 5. Қос интегралдың геометрия мен физикада қолданылуы

1. Көлемді есептеу. Бірінші параграфтан жоғарғы жағынан $z=f(x,y)$ бетімен, мұндағы $f(x,y)$ үзіліссіз функция, төменгі жағынан ауданы бар тұйық D облысымен шектелген қисықсызықты цилиндрдің көлемі белгілі

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{1}$$

1-мысал. $z=x^2+y^2,\ y^2=4x,\ x=1,\ z=0$ беттермен шектелген дененің көлемін табайық.

Шешуі. $z=x^2+y^2$ параболоид, $y^2=4x$ қисығы – жасаушысы OZ осіне параллель параболалық цилиндр және ол OXY жазықтығында OX осіне қарай симметриялы парабола, $x=1$ жазықтығы YOZ жазықтығына параллель, $z=0$ болса XOY жазықтығының теңдеуі.

Цилиндрлік дене XOZ жазықтығына қарай симметриялы, сондықтан AOB облысы көлемінің жартысын тауып оны екі еселеу жеткілікті. Интегралдау облысы $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2\sqrt{x}$. Онда ізделінген көлем

$$V=2\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}}\left(x^2+y^2\right)dy=2\int_0^1\left[\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{x}}\right]dx=$$

$$=2\int_0^1\left(2x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right)dx=4\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}+\frac{4}{3}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1=8\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{15}\right)=\frac{344}{105}.$$

2. Ауданды есептеу. Егер (1) формулада $f(x,y)=1$ болса, онда берілген облыстың ауданын аламыз

$$S=\iint\limits_D dxdy \tag{2}$$

Аудан поляр координатасында

$$S=\iint\limits_G \rho d\rho d\varphi \tag{3}$$